

Über den Energieverlust elektrisch geladener Teilchen in piezo-elektrischen Kristallen*

Von Joachim SEEBASS **

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig
(Z. Naturforschg. **19 a**, 284—293 [1964]; eingegangen am 31. Oktober 1963)

Due to the coupling of electric and elastic fields in piezoelectric crystals a charged particle moving in a piezoelectric crystal will loose energy by emission of mechanical radiation (ultrasonic waves). After introducing some simplifying assumptions (1. we deal with the crystals as being elastically isotropic, 2. we neglect the influence of the piezoelectric crystal on the electric field of the particle) this energy loss is computed for cubic crystals, and it is shown to be in the range of some 10 to some 100 keV/cm.

1. Einleitung

Bekanntlich erzeugt ein äußeres elektrisches Feld in einem piezoelektrischen Kristall ein elastisches Feld. Ein elektrisch geladenes Teilchen, das sich in einem piezoelektrischen Kristall bewegt, wird also auch ein elastisches Feld hervorrufen. Bewegt sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit, die größer ist als die Ausbreitungs-Geschwindigkeiten der elastischen Wellen, so wird es zur Ausbildung des elastischen Feldes in Form von MACHSchen Kegeln hinter dem Teilchen kommen. Das Teilchen läuft — bildlich gesprochen — dem von ihm erzeugten elastischen Feld davon, d. h. es verliert Energie durch Abstrahlung mechanischer Energie.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diesen Energieverlust zu berechnen. Er stellt natürlich nur einen Teil des gesamten Energieverlustes dar. Die übrigen Anteile, die durch Ionisation, Polarisation usw. hervorgerufen werden, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht in Betracht gezogen. Sie wurden von FERMI¹ berechnet.

Wir schlagen hier den gleichen Weg ein, wie ihn FERMI in der oben zitierten Arbeit ging: Wir betrachten ein elektrisch geladenes Teilchen, das sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem unendlich großen piezoelektrischen Kristall bewegt. Das von diesem Teilchen erzeugte elastische Feld wird unter Benutzung von FOURIER-Integralen berechnet und in den Ausdruck für den Vektor der mechanischen Energiestromdichte eingesetzt. Durch Integration der Radialkomponente (Zylinderkoordinaten) dieses Vektors über einen unendlich langen Zylinder,

der die Bewegungsrichtung des Teilchens als Achse hat, erhält man die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie.

Wir beschränken uns bei unseren Untersuchungen auf Kristalle, die nur eine piezoelektrische Konstante besitzen. Das sind die Kristalle der Klassen 23 und $\bar{4}3m$, z. B. Zinkblende und Natriumchlorat. Die Matrixdarstellung des piezoelektrischen Tensors e_{ijk} lautet für diese Kristallklassen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{14} \end{pmatrix}.$$

Ferner machen wir folgende vereinfachende Annahmen:

1. Wir sehen die betrachteten Kristalle als elastisch isotrop an. Die Matrixdarstellung des elastischen Tensors c_{ijkl} lautet für die oben erwähnten Kristallklassen

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}.$$

Der Tensor hat also drei voneinander unabhängige Komponenten. Bei elastisch isotropen Körpern sieht die Matrix genau so aus wie oben. Zwischen den Komponenten besteht jedoch die Beziehung

$$c_{44} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}).$$

Diese Gleichung ist natürlich bei den Kristallen der uns interessierenden Klassen nicht erfüllt. Wir wollen aber ihre Gültigkeit annehmen, um das Problem mathematisch traktabel zu halten.

* Auszug aus Dissertation, Technische Hochschule, Braunschweig 1961.

** Jetzt: Institut für Elektrophysik der Technischen Hochschule Braunschweig.

¹ E. FERMI, Phys. Rev. **57**, 485 [1940].



2. Wir vernachlässigen die Rückwirkung des elastischen Feldes auf das elektrische Feld: Bringt man ein elektrisch geladenes Teilchen in einen piezoelektrischen Kristall, so wird das ursprüngliche elektrische Feld des Teilchens durch die Wechselwirkung mit dem piezoelektrischen Kristall verändert. Diese Änderung vernachlässigen wir, da sie bezüglich der Komponenten des elastischen Verschiebungsvektors Korrekturglieder hervorrufen würde, die von zweiter Ordnung in den piezoelektrischen Konstanten sind. Wir setzen also als elektrisches Feld im Kristall das Feld einer bewegten Punktladung an, wie es sich aus der MAXWELLSchen Theorie ergibt.

In piezoelektrischen Kristallen zeigen die Ausbreitungs-Geschwindigkeiten der elastischen Wellen Anisotropie. (MEYER und POLDER² geben die Geschwindigkeiten in speziellen Ausbreitungsrichtungen für Kristalle vom ZnS-Typ an. Genauere Untersuchungen findet man bei MEIER und SCHUSTER³.) Durch unsere Annahme 1 wird die Anisotropie soweit herabgesetzt, daß nur noch der Einfluß der piezoelektrischen Konstanten übrigbleibt. Durch die Annahme 2 tritt aber auch dieser Einfluß nicht mehr auf (die Korrektur am Quadrat der Wellengeschwindigkeiten hätte bei den von uns untersuchten Kristallen weniger als 1% betragen).

2. Die Feldgleichungen und der Vektor der mechanischen Energiestromdichte

Um die Feldgleichungen und den Ausdruck für den Vektor der mechanischen Energiestromdichte zu gewinnen, gehen wir aus von einem Variationsprinzip

$$\delta \int_{t'}^{t''} dt \int \mathcal{L} d\tau_r = 0. \quad (2.1)$$

Die LAGRANGE-Dichte \mathcal{L} sei eine Funktion der Komponenten des elastischen Verschiebungsvektors \mathbf{q} , deren ersten räumlichen und zeitlichen Ableitungen sowie der Koordinaten und der Zeit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \frac{\partial q_i}{\partial x_j}, \dot{q}_i, x_i, t), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Bei Variation der q_i lauten die EULER-LAGRANGE-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x_j)} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Diese Gleichungen repräsentieren unsere Feldgleichungen.

Die zu den q_i kanonisch konjugierten Feldimpulsdichten sind

$$p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Damit erhält man die HAMILTON-Dichte \mathcal{H} des Feldes

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Für die zeitliche Änderung dieser Größe ergibt sich unter Berücksichtigung der Feldgleichungen (2.3)

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x_j)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Wir setzen nun

$$S_j = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x_j)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

und erhalten dann

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Denkt man sich nun einmal \mathcal{L} als nicht explizit von der Zeit abhängig, so wird

$$\partial \mathcal{H} / \partial t + \text{div } \mathbf{S} = 0.$$

Das ist genau der Energie-Satz in differentieller Form. \mathcal{H} ist die Energie-Dichte und \mathbf{S} ist der Vektor der Energiestromdichte. Hängt \mathcal{L} explizit von der Zeit ab, so steht das elastische Feld in Wechselwirkung mit äußeren Systemen bzw. Feldern.

Wir machen nun für die LAGRANGE-Dichte \mathcal{L} den folgenden Ansatz:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^3 c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \sum_{h,i,j=1}^3 e_{hij} E_h \varepsilon_{ij}. \quad (2.8)$$

Darin entsprechen die ersten beiden Terme der kinetischen und potentiellen Energie des elastischen Feldes. Der letzte Term enthält die Wechselwirkungsenergie zwischen dem elastischen und dem elektrischen Feld. Mit Hilfe der Beziehung

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right),$$

sowie unter Berücksichtigung der Symmetrie-Eigen-

² H. J. G. MEYER u. D. POLDER, Physica **19**, 255 [1953].

³ R. MEIER u. K. SCHUSTER, Ann. Phys., Lpz. (6) **11**, 397 [1953].

schaften der c_{ijkl} und der e_{hij} kann man die LAGRANGE-Dichte umformen in

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varrho \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^3 c_{ijkl} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_l} \right) + \sum_{h,i,j=1}^3 e_{hij} E_h \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.9)$$

Die Variation der q_i ergibt nun die Feldgleichungen

$$-\varrho \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} + \sum_{j,k,l=1}^3 c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_l} \right) - \sum_{h,j=1}^3 e_{hij} \frac{\partial E_h}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

und die Komponenten des Vektors der Energiestromdichte

$$S_j = - \sum_{i,k,l=1}^3 c_{ijkl} \dot{q}_i \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_l} \right) + \sum_{h,i=1}^3 e_{hij} E_h \dot{q}_i, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

Diese Gleichungen gelten noch für beliebige Kristalle. (Sie enthalten aber nicht mehr die Rückwirkung des elastischen Feldes auf das elektrische Feld.) Spezialisieren wir die Feldgleichungen nun für Kristalle, die nur eine piezoelektrische Konstante haben und die wir als elastisch isotrop ansehen, so lauten sie

$$c_{44} \Delta q_i + (c_{11} - c_{44}) \frac{\partial}{\partial x_i} [\operatorname{div} \mathbf{q}] - \varrho \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = e_{14} \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_j} + \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch!} \quad (2.12)$$

Für den Vektor der mechanischen Energiestromdichte erhält man

$$S_i = S_i^{(1)} + S_i^{(2)} \quad (2.13)$$

mit $S_i^{(1)} = -(c_{11} - 2c_{44}) \dot{q}_i \operatorname{div} \mathbf{q}$

$$- c_{44} \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.14)$$

und $S_i^{(2)} = e_{14} [\dot{q}_j E_k + \dot{q}_k E_j],$

$$i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch!} \quad (2.15)$$

3. Methode zur Lösung der Feldgleichungen

Es ist ziemlich schwierig, die Feldgleichungen (2.12) direkt zu lösen. Daher wird nun der folgende Weg eingeschlagen: Wir stellen zunächst eine Differentialgleichung für die Größe $\Theta = \operatorname{div} \mathbf{q}$ auf, indem wir jeweils die i -te der Gln. (2.12) nach x_i differen-

zieren – dabei können wir jeweils beim ersten Glied die Operationen Δ und $\partial/\partial x_i$ vertauschen – und dann die so gebildeten drei Gleichungen addieren. So erhält man

$$c_{11} \Delta \Theta - \varrho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = e_{14} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right], \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch!} \quad (3.1)$$

Mit den Abkürzungen

$a = \sqrt{c_{11}/\varrho}$ = Ausbreitungs-Geschwindigkeit der elastischen Longitudinalwellen,

$$g(\mathbf{r}, t) = - \frac{e_{14}}{c_{11}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right], \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch!}, \quad (3.2)$$

lautet die Differentialgleichung für Θ :

$$\Delta \Theta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = -g(\mathbf{r}, t). \quad (3.3)$$

Diese Gleichung können wir lösen. Mit dem so gewonnenen Θ gehen wir in die – etwas umgeformten – Gln. (2.12)

$$c_{44} \Delta q_i - \varrho \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = e_{14} \left[\frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right] - (c_{11} - c_{44}) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch!},$$

die wir, mit den Abkürzungen

$b = \sqrt{c_{44}/\varrho}$ = Ausbreitungs-Geschwindigkeit der elastischen Transversalwellen,

$$g_i(\mathbf{r}, t) = - \frac{e_{14}}{c_{44}} \left[\frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \frac{\partial E_k}{\partial x_j} \right] + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch!}, \quad (3.4)$$

auch so schreiben können:

$$\Delta q_i - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = -g_i(\mathbf{r}, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Diese Gleichungen sind vom gleichen Typ wie die Gleichung für Θ und werden daher analog gelöst.

Eine Lösung der Gl. (3.3) ist

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = \iint g(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') d\mathbf{r}' dt',$$

wobei die Integrationen über den gesamten Wertebereich der x'_i und t' zu erstrecken sind. Da wir die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem unendlich großen Kristall untersuchen und annehmen wollen, daß Θ die natürlichen Randbedingungen im Unendlichen erfüllt, können wir die Greensche Funktion von IWANENKO und SOKOLOV⁴ übernehmen:

⁴ D. IWANENKO u. A. SOKOLOV, Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1953.

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \frac{1}{16 \pi^4} \int \int \exp\{i \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i \omega(t - t')\} \left[\frac{1}{k^2 - \omega^2/a^2} + i \pi \frac{\omega}{|\omega|} \delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}\right) \right] d\tau_{\mathbf{k}} d\omega. \quad (3.6)$$

Wir wollen ein geladenes Teilchen betrachten, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v in der x_3 -Richtung bewegt. Dann wird die Funktion $g(\mathbf{r}, t)$ hinsichtlich t nur von dem Argument $\bar{x}_3 = x_3 - v t$ abhängen und wir können $g(\mathbf{r}', t')$ durch folgendes FOURIER-Integral darstellen:

$$g(\mathbf{r}', t') = \frac{1}{\sqrt{2} \pi^3} \int \bar{g}(\mathbf{k}') \exp\{i[k_1' x_1' + k_2' x_2' + k_3' (x_3' - v t')]\} d\tau_{\mathbf{k}'}.$$

Damit wird

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{16 \pi^4 \sqrt{2} \pi^3} \int \int \int \int \bar{g}(\mathbf{k}') \exp\{i[x_1' (k_1' - k_1) + x_2' (k_2' - k_2) + x_3' (k_3' - k_3) - t' (v k_3' - \omega)]\} \cdot \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \left[\frac{1}{k^2 - \omega^2/a^2} + i \pi \frac{\omega}{|\omega|} \delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}\right) \right] d\tau_{\mathbf{r}'} d\tau_{\mathbf{k}'} d\omega d\tau_{\mathbf{k}}. \quad (3.7)$$

Die Integrationen über $d\tau_{\mathbf{r}'}$, $d\tau_{\mathbf{k}'}$, $d\omega$ und $d\tau_{\mathbf{k}}$ lassen sich sofort ausführen und ergeben

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2} \pi^3} \int \bar{g}(\mathbf{k}) \exp\{i[k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 \bar{x}_3]\} \left[\frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + (1 - v^2/a^2) k_3^2} + i \pi \frac{k_3}{|k_3|} \delta\left(k_1^2 + k_2^2 + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) k_3^2\right) \right] d\tau_{\mathbf{k}}. \quad (3.8)$$

In analoger Weise gewinnt man Darstellungen für die Komponenten q_i des elastischen Verschiebungsvektors.

4. Die Berechnung von $\Theta = \text{div } \mathbf{q}$

Um die Größe $\Theta(\mathbf{r}, t)$ explizit angeben zu können, müssen wir zunächst $\bar{g}(\mathbf{k})$ berechnen. Wie schon gesagt wurde, nehmen wir an, daß das elektrische Feld von einer Punktladung e herrührt, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit v in x_3 -Richtung in dem unendlich großen Kristall bewegen möge. Dem entspricht eine elektrische Ladungs- und Stromdichte

$$\begin{aligned} \rho_{\text{el}} &= e \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3 - v t) = e \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(\bar{x}_3), \\ I_3 &= v e \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3 - v t) = v \rho_{\text{el}}, \\ I_1 &= I_2 = 0. \end{aligned}$$

Die Potentiale V und \mathbf{A} müssen die Wellengleichungen

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho_{\text{el}}$$

und

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{I}$$

erfüllen. Man kann leicht zeigen, daß

$$A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = (v/c^2) V$$

eine Lösung der Wellengleichung für \mathbf{A} ist, wenn V eine Lösung der Wellengleichung für V ist.

Macht man nun unter Berücksichtigung der Tatsache, daß V nur über das Argument $\bar{x}_3 = x_3 - v t$ von t abhängt, den Ansatz

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2} \pi^3} \int \bar{V}(\mathbf{k}) \exp\{i[k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 \bar{x}_3]\} d\tau_{\mathbf{k}}, \quad (4.1)$$

so erhält man nach leichter Rechnung aus der Wellengleichung für V :

$$\bar{V}(\mathbf{k}) = \frac{e}{\sqrt{2} \pi^3 \epsilon} \cdot \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + (1 - \beta^2) k_3^2} \quad (4.2)$$

mit

$$\beta = v/c.$$

Nach der Formel

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \dot{\mathbf{A}}$$

kann man dann die FOURIER-Transformierten der Komponenten der elektrischen Feldstärke und ihrer räumlichen Ableitungen bilden. Damit erhält man gemäß Gl. (3.2)

$$\bar{g}(\mathbf{k}) = -\frac{2 i e e_{14} (3 - \beta^2)}{\sqrt{2} \pi^3 \epsilon c_{11}} \cdot \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1^2 + k_2^2 + (1 - \beta^2) k_3^2}, \quad (4.3)$$

d. h., es wird nach Gl. (3.8)

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i e e_{14} (3 - \beta^2)}{4 \pi^3 \epsilon c_{11}} \int \frac{k_1 k_2 k_3 \exp\{i[k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 \bar{x}_3]\}}{k_1^2 + k_2^2 + (1 - \beta^2) k_3^2} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + (1 - v^2/a^2) k_3^2} + i \pi \frac{k_3}{|k_3|} \delta(k_1^2 + k_2^2 + (1 - v^2/a^2) k_3^2) \right] d\tau_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Zur Berechnung dieses Integrals führt man zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten im \mathbf{r} - und \mathbf{k} -Raum ein mit der 3-Richtung als Achse:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= r^2, & x_1 &= r \cos \Phi, & x_2 &= r \sin \Phi, & \bar{x}_3 &= x_3 - v t, \\ k_1^2 + k_2^2 &= \kappa^2, & k_1 &= \kappa \cos \varphi, & k_2 &= \kappa \sin \varphi, & k_3 &= k, \\ d\tau_{\mathbf{k}} &= \kappa d\kappa d\varphi. \end{aligned}$$

Damit geht (4.4) über in

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{r}, t) = & - \frac{i e e_{14} (3 - \beta^2)}{4 \pi^3 \varepsilon c_{11}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ k \exp\{i k \bar{x}_3\} \int_0^{\infty} \left(\frac{\kappa^3}{\kappa^2 + (1 - \beta^2) k^2} \left[\frac{1}{\kappa^2 + (1 - v^2/a^2) k^2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + i \pi \frac{k}{|k|} \delta(\kappa^2 + (1 - v^2/a^2) k^2) \right] \int_0^{2\pi} e^{i \kappa r \cos(\varphi - \Phi)} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right) d\kappa \right\} dk. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Integration über φ läßt sich nach einigen Umformungen ausführen und ergibt

$$- \pi \sin(2 \Phi) I_2(\kappa r),$$

wobei $I_2(\kappa r)$ die BESSEL-Funktion 2. Ordnung ist. Bei der Integration über κ muß man die beiden Fälle $v/a < 1$ und $v/a > 1$ unterscheiden. Bei $v/a < 1$ liefert nämlich das Glied mit der δ -Funktion keinen Beitrag zum Integral, da das Argument der δ -Funktion im gesamten Integrationsbereich keine Nullstelle aufweist. Ohne auf weitere Einzelheiten bei der Integration über κ einzugehen, seien hier nur die Ergebnisse angeführt

$$\Theta(\mathbf{r}, t) = - \frac{i e e_{14} (2 + \gamma^2) \sin(2 \Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon c_{11} v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k \exp\{i k \bar{x}_3\} \{ \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) - \alpha^2 K_2(|k| \alpha r) \} dk \quad \text{für } v/a < 1, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{r}, t) = & - \frac{i e e_{14} (2 + \gamma^2) \sin(2 \Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon c_{11} v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k \exp\{i k \bar{x}_3\} \left\{ \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) + \frac{\pi}{2} \alpha'^2 \left[N_2(|k| \alpha' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \alpha' r) \right] \right\} dk \\ & \text{für } v/a > 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

In diesen Formeln sind die $N_2(|k| \alpha' r)$ und $K_2(|k| \gamma r)$ die NEUMANNschen Funktionen bzw. die modifizierten BESSEL-Funktionen 3. Art. Ferner ist

$$\alpha = \sqrt{1 - v^2/a^2}, \quad \alpha' = \sqrt{v^2/a^2 - 1}, \quad \gamma = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Auch die Integration über k läßt sich geschlossen durchführen. In der Tat erhält man dabei für den Fall $v/a > 1$ einen Anteil von Θ , der sich in der Gestalt eines MACHschen Kegels hinter dem Teilchen ausbreitet. Da die Integration über k aber für die Berechnung der Energieabstrahlung noch nicht von Interesse ist, soll sie hier nicht ausgeführt werden.

5. Die Berechnung der Komponenten des elastischen Verschiebungsvektors

Die Ausgangsgleichungen zur Berechnung der Komponenten q_i des elastischen Verschiebungsvektors lauten in Analogie zu Gl. (3.8)

$$\begin{aligned} q_i(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \bar{g}_i(\mathbf{k}) \exp\{i[k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 \bar{x}_3]\} \left[\frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + (1 - v^2/b^2) k_3^2} \right. \\ & \left. + i \pi \frac{k_3}{|k_3|} \delta(k_1^2 + k_2^2 + (1 - v^2/b^2) k_3^2) \right] d\tau_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die FOURIER-Transformierten $\bar{g}_i(\mathbf{k})$ sind

$$\bar{g}_i(\mathbf{k}) = i \left[- \frac{e_{14}}{c_{44}} (k_k \bar{E}_j(\mathbf{k}) + k_j \bar{E}_k(\mathbf{k})) + \frac{a^2 - b^2}{b^2} k_i \bar{\Theta}(\mathbf{k}) \right], \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch!}, \quad (5.2)$$

wobei $\bar{E}_j(\mathbf{k})$ bzw. $\bar{E}_k(\mathbf{k})$ die FOURIER-Transformierten der entsprechenden Komponenten der elektrischen

Feldstärke sind und

$$\bar{\Theta}(\mathbf{k}) = - \frac{2 i e e_{14} (3 - \bar{\beta}^2)}{\sqrt{2} \pi^3 \varepsilon c_{11}} \cdot \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1^2 + k_2^2 + (1 - \bar{\beta}^2) k_3^2} \left[\frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + (1 - v^2/a^2) k_3^2} + i \pi \frac{k_3}{|k_3|} \delta(k_1^2 + k_2^2 + (1 - v^2/a^2) k_3^2) \right] \text{ist.} \quad (5.3)$$

Zur Integration führt man wieder Zylinderkoordinaten im \mathbf{r} - und \mathbf{k} -Raum ein. Die Integration über den Winkel φ läßt sich wieder relativ leicht bewerkstelligen. Bei der Integration über z hat man jedoch nun drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich

$$v < b, \quad b < v < a \quad \text{und} \quad a < v < c.$$

Weitere Einzelheiten zur Integration sollen hier nicht mitgeteilt werden. Wir führen lediglich das Ergebnis an. Dabei wurden die Komponenten q_1 und q_2 gleich auf Zylinderkoordinaten umgerechnet gemäß

$$q_r = q_1 \cos \Phi + q_2 \sin \Phi, \quad q_\varphi = q_2 \cos \Phi - q_1 \sin \Phi.$$

Man erhält für die einzelnen Komponenten

$$q_3(\mathbf{r}, t) = - \frac{e e_{14} \sin(2 \Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon \varrho v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i k \bar{x}_3\} \left\{ \left[1 + (2 + \gamma^2) \left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \right] \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) - (2 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} \alpha^2 K_2(|k| \alpha r) - \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] \beta^2 K_2(|k| \beta r) \right\} dk \quad \text{für } v < b, \quad (5.4)$$

$$q_3(\mathbf{r}, t) = - \frac{e e_{14} \sin(2 \Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon \varrho v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i k \bar{x}_3\} \left\{ \left[1 + (2 + \gamma^2) \left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \right] \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) - (2 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} \alpha^2 K_2(|k| \alpha r) + \frac{\pi}{2} \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] \beta'^2 \left[N_2(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \beta' r) \right] \right\} dk \quad \text{für } b < v < a, \quad (5.5)$$

$$q_3(\mathbf{r}, t) = - \frac{e e_{14} \sin(2 \Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon \varrho v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i k \bar{x}_3\} \left\{ \left[1 + (2 + \gamma^2) \left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \right] \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) + \frac{\pi}{2} (2 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} \alpha'^2 \left[N_2(|k| \alpha' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \alpha' r) \right] + \frac{\pi}{2} \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] \beta'^2 \left[N_2(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \beta' r) \right] \right\} dk \quad \text{für } a < v < c, \quad (5.6)$$

$$q_r(\mathbf{r}, t) = \frac{i e e_{14} \sin(2 \Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon \varrho v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{i k \bar{x}_3\}}{k} \left\{ k \left[\left[1 + \gamma^2 - (2 + \gamma^2) \left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \right] \gamma^2 K_1(|k| \gamma r) + (2 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} \alpha^3 K_1(|k| \alpha r) - \left[1 + \gamma^2 + (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] \beta^2 K_1(|k| \beta r) \right] - \frac{2(2 + \gamma^2)}{r} \left[\left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) - \frac{a^2}{v^2} \alpha^2 K_2(|k| \alpha r) + \frac{b^2}{v^2} \beta^2 K_2(|k| \beta r) \right] \right\} dk \quad \text{für } v < b, \quad (5.7)$$

$$q_r(\mathbf{r}, t) = \frac{i e e_{14} \sin(2 \Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon \varrho v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{i k \bar{x}_3\}}{k} \left\{ k \left[\left[1 + \gamma^2 - (2 + \gamma^2) \left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \right] \gamma^2 K_1(|k| \gamma r) + (2 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} \alpha^3 K_1(|k| \alpha r) + \frac{\pi}{2} \left[1 + \gamma^2 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] \beta'^2 \left[N_1(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_1(|k| \beta' r) \right] \right] - \frac{2(2 + \gamma^2)}{r} \left[\left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) - \frac{a^2}{v^2} \alpha^2 K_2(|k| \alpha r) - \frac{\pi}{2} \frac{b^2}{v^2} \beta'^2 \left[N_2(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \beta' r) \right] \right] \right\} dk \quad \text{für } b < v < a, \quad (5.8)$$

$$q_r(\mathbf{r}, t) = \frac{i e e_{14} \sin(2\Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon_Q v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{i k \bar{x}_3\}}{k} \left\{ |k| \left[\left[1 + \gamma^2 - (2 + \gamma^2) \left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \gamma^2 \right] \gamma K_1(|k| \gamma r) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi}{2} (2 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} \alpha'^3 \left[N_1(|k| \alpha' r) - i \frac{k}{|k|} I_1(|k| \alpha' r) \right] + \frac{\pi}{2} \left[1 + \gamma^2 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \beta'^2 \right] \beta' \left[N_1(|k| \beta' r) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - i \frac{k}{|k|} I_1(|k| \beta' r) \right] \right] - \frac{2(2 + \gamma^2)}{r} \left[\left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) + \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{v^2} \alpha'^2 \left[N_2(|k| \alpha' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \alpha' r) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{2} \frac{b^2}{v^2} \beta'^2 \left[N_2(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \beta' r) \right] \right] \right\} dk \quad \text{für } a < v < c, \quad (5.9)$$

$$q_\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{i e e_{14} \cos(2\Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon_Q v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{i k \bar{x}_3\}}{k} \left\{ (1 + \gamma^2) |k| \left[\gamma K_1(|k| \gamma r) - \beta K_1(|k| \beta r) \right] \right. \\ \left. + \frac{2(2 + \gamma^2)}{r} \left[\left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) - \frac{a^2}{v^2} \alpha'^2 K_2(|k| \alpha r) + \frac{b^2}{v^2} \beta'^2 K_2(|k| \beta r) \right] \right\} dk \quad \text{für } v < b, \quad (5.10)$$

$$q_\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{i e e_{14} \cos(2\Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon_Q v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{i k \bar{x}_3\}}{k} \left\{ (1 + \gamma^2) |k| \left[\gamma K_1(|k| \gamma r) + \frac{\pi}{2} \beta' \left[N_1(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_1(|k| \beta' r) \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{2(2 + \gamma^2)}{r} \left[\left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) - \frac{a^2}{v^2} \alpha'^2 K_2(|k| \alpha r) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{2} \frac{b^2}{v^2} \beta'^2 \left[N_2(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \beta' r) \right] \right] \right\} dk \quad \text{für } b < v < a, \quad (5.11)$$

$$q_\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{i e e_{14} \cos(2\Phi)}{4 \pi^2 \varepsilon_Q v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{i k \bar{x}_3\}}{k} \left\{ (1 + \gamma^2) |k| \left[\gamma K_1(|k| \gamma r) + \frac{\pi}{2} \beta' \left[N_1(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_1(|k| \beta' r) \right] \right] \right. \\ \left. + \frac{2(2 + \gamma^2)}{r} \left[\left(\frac{a^2}{v^2} - \frac{b^2}{v^2} \right) \gamma^2 K_2(|k| \gamma r) + \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{v^2} \alpha'^2 \left[N_2(|k| \alpha' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \alpha' r) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{2} \frac{b^2}{v^2} \beta'^2 \left[N_2(|k| \beta' r) - i \frac{k}{|k|} I_2(|k| \beta' r) \right] \right] \right\} dk \quad \text{für } a < v < c. \quad (5.12)$$

In diesen Formeln ist $\beta = \sqrt{1 - v^2/b^2}$ und $\beta' = \sqrt{v^2/b^2 - 1}$.

6. Die Berechnung der Energieabstrahlung

In Abschnitt 2 leiteten wir einen Ausdruck für die Komponenten des Vektors \mathbf{S} der mechanischen Energiedichte ab. Um die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie zu berechnen, muß man die Radialkomponente von \mathbf{S} über einen unendlich langen Zylinder um die Bewegungsrichtung des Teilchens integrieren. Dividiert man das so gewonnene Ergebnis noch durch die Geschwindigkeit v des Teilchens, so erhält man den Energieverlust des Teilchens pro Weglängeneinheit.

Die Radialkomponente von \mathbf{S} ist

$$S_r = -c_{11} \dot{q}_r \operatorname{div} \mathbf{q} - c_{44} \left\{ -2 \dot{q}_r \left[\frac{q_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \right] + \dot{q}_\Phi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial \Phi} + \frac{\partial q_\Phi}{\partial r} - \frac{q_\Phi}{r} \right] + \dot{q}_3 \left[\frac{\partial q_r}{\partial x_3} + \frac{\partial q_3}{\partial r} \right] \right\} \\ + e_{14} \{ [\dot{q}_r \sin(2\Phi) + \dot{q}_\Phi \cos(2\Phi)] E_3 + \dot{q}_3 \sin(2\Phi) E_r \}. \quad (6.1)$$

Für E_3 und E_r findet man leicht die Integral-Darstellungen

$$E_3 = -\frac{i e \gamma^2}{4 \pi^2 \varepsilon_Q} \int_{-\infty}^{+\infty} k K_0(|k| \gamma r) \exp\{i k \bar{x}_3\} dk \quad \text{und} \quad E_r = \frac{e \gamma}{4 \pi^2 \varepsilon_Q} \int_{-\infty}^{+\infty} |k| K_1(|k| \gamma r) \exp\{i k \bar{x}_3\} dk. \quad (6.2), (6.3)$$

Man muß nun — entsprechend dem betrachteten Geschwindigkeitsintervall — die Ausdrücke (5.4) bis (5.12) sowie (6.2) und (6.3) in (6.1) einsetzen und dann integrieren. Das Flächenelement, über das integriert wird, ist

$$df = r d\Phi dx_3 = r d\Phi d\bar{x}_3.$$

An Stelle der \dot{q}_i setzen wir die konjugiert komplexen Größen \dot{q}_i^* ein. Dann werden sämtliche Terme von der Form

$$\operatorname{const} \cdot r \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\sin^2(2\Phi)}{\cos^2(2\Phi)} \right\rangle d\Phi \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x}_3 \exp\{i(k' - k) \bar{x}_3\} \{ \dot{q}_i^*(k) \} \left\langle \frac{\partial q_j(k')}{\partial x_l} \right\rangle \left\langle E_j(k') \right\rangle,$$

wobei die geschweiften Klammern die Integranden (ohne exp.-Faktoren) der entsprechenden Ausdrücke (5.4) bis (5.12) sowie (6.2) und (6.3) bedeuten. Die Integration über Φ ergibt in jedem Fall den Faktor π , und die Integration über \bar{x}_3 ergibt

$$2 \pi \delta(k' - k).$$

Damit läßt sich auch die Integration über k' sofort ausführen. Bei der abschließenden Integration über k braucht man dann nur noch die in k geraden Glieder zu berücksichtigen.

Man kann leicht zeigen, daß für $v < b$ keine mechanische Energie abgestrahlt wird. In diesem Fall ist nämlich der ganze Integrand eine ungerade Funktion von k . Wir brauchen also nur – wie es ja auch physikalisch sinnvoll ist – die Fälle $b < v < a$ und $a < v < c$ zu betrachten.

Man erhält für das Geschwindigkeitsintervall $b < v < a$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{ds} \right)_{b < v < a} &= \frac{e^2 e_{14}^2 c_{44} r}{8 \pi \varepsilon^2 \varrho^2 v^4} \int_0^\infty \left\{ -\frac{2}{r} \left[(1 + \gamma^2)^2 + \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] [\beta'^2 - 2 \gamma^2] \right] \beta'^2 k K_0(k \gamma r) I_0(k \beta' r) \right. \\ &+ \left[\left[2(1 + \gamma^2) - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \beta'^2 \right] \frac{v^2}{b^2} \gamma^2 - \left((1 + \gamma^2)^2 + \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] [\beta'^2 - 2 \gamma^2] \right) (\gamma^2 - \beta'^2) \right] \\ &\cdot \beta'^2 k^2 K_0(k \gamma r) I_1(k \beta' r) + (1 - \gamma^2) \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] \gamma^2 \beta' k^2 K_2(k \gamma r) I_1(k \beta' r) \\ &\left. + \left[(1 + \gamma^2)^2 + \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] [\beta'^2 - (1 + \gamma^2)] \right] \frac{\beta'^2}{r} k \right\} dk. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für die ersten drei Integrale kann man aus Tafelwerken entnehmen (z. B. RYSHIK-GRADSTEIN⁵ oder GRÖBNER-HOFREITER⁶). Beim letzten Integral muß man die Integration an einer oberen Grenze $k = k_{\max}$ abbrechen, da das Integral sonst divergiert. Wir werden später festsetzen, wie diese Größe k_{\max} zu bestimmen ist. Das Ergebnis der Integration lautet:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{ds} \right)_{b < v < a} &= \frac{e^2 e_{14}^2 c_{44} \beta'^2}{4 \pi \varepsilon^2 \varrho^2 v^4} \left\{ \left[(1 + \gamma^2)^2 + \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] [\beta'^2 - (1 + \gamma^2)] \right] \frac{k_{\max}^2}{4} \right. \\ &\left. - \frac{1}{r^2} \left(\frac{b^2}{v^2} \right) \left[(2 + \gamma^2) [(1 + \gamma^2)^2 + 2 \gamma^2] \left(\frac{b^2}{v^2} \right)^2 - [2(1 + 2 \gamma^2) + \gamma^2(2 - \gamma^4)] \frac{b^2}{v^2} + \gamma^2(2 - \gamma^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

In analoger Weise erhält man für das Geschwindigkeitsintervall $a < v < c$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{ds} \right)_{a < v < c} &= \frac{e^2 e_{14}^2 c_{44}}{4 \pi \varepsilon^2 \varrho^2 v^4} \left\{ \beta'^2 \left[\left[(1 + \gamma^2)^2 + \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] [\beta'^2 - (1 + \gamma^2)] \right] \frac{k_{\max}^2}{4} \right. \right. \\ &- \frac{1}{r^2} \left(\frac{b^2}{v^2} \right) \left[(2 + \gamma^2) [(1 + \gamma^2)^2 + 2 \gamma^2] \left(\frac{b^2}{v^2} \right)^2 - [2(1 + 2 \gamma^2) + \gamma^2(2 - \gamma^4)] \frac{b^2}{v^2} + \gamma^2(2 - \gamma^2) \right] \\ &+ \frac{c_{11}}{c_{44}} \left(1 - \frac{a^2}{v^2} \right) (2 + \gamma^2) \left[(2 + \gamma^2) \alpha'^2 \frac{k_{\max}^2}{4} + \frac{1}{r^2} \left(\gamma^2 \left(1 - \frac{a^2}{v^2} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - (1 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} \left[1 - \gamma^2 + (2 + \gamma^2) \left(1 - \frac{a^2}{v^2} \right) \right] \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

7. Diskussion der Ergebnisse

Wie man an den Formeln (6.4) und (6.5) sieht, ist es zweckmäßig, die Energieabstrahlung hinsichtlich der Wellenart (Transversal- bzw. Longitudinalwellen) und nicht hinsichtlich verschiedener Geschwindigkeitsbereiche zu unterscheiden. Dann ist die Energieabstrahlung durch Transversalwellen gegeben durch

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{ds} \right)_{\text{trans}} &= \frac{e^2 e_{14}^2}{4 \pi \varepsilon^2 c_{44}} \left(1 - \frac{b^2}{v^2} \right) \left\{ \left[(1 + \gamma^2)^2 + \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right] \right] \frac{k_{\max}^2}{4} \right. \\ &- \frac{1}{r^2} \left(\frac{b^2}{v^2} \right)^2 \left[(2 + \gamma^2) [(1 + \gamma^2)^2 + 2 \gamma^2] \left(\frac{b^2}{v^2} \right)^2 - [2(1 + 2 \gamma^2) + \gamma^2(2 - \gamma^4)] \frac{b^2}{v^2} + \gamma^2(2 - \gamma^2) \right] \left. \right\} \\ &\text{für } b < v < c \quad (7.1) \end{aligned}$$

⁵ I. M. RYSHIK u. I. S. GRADSTEIN, Summen-, Produkt- und Integraltafeln, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1953.

⁶ W. GRÖBNER u. N. HOFREITER, Integraltafeln, 2. Teil, Springer-Verlag, Wien-Innsbruck 1950.

und die Energieabstrahlung durch Longitudinalwellen ist

$$\left(\frac{dW}{ds}\right)_{\text{long}} = \frac{e^2 e_{14}^2}{4 \pi \varepsilon^2 c_{11}} \frac{a^2}{v^2} \left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right)^2 (2 + \gamma^2) \left\{ (2 + \gamma^2) \frac{k_{\text{max}}^2}{4} - \frac{1}{r^2} \left[3(1 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} - \gamma^2 \right] \frac{a^2}{v^2} \right\} \text{ für } a < v < c. \quad (7.2)$$

Wir wählen nun die Größe k_{max} als $k_{\text{max}} = 2 \pi / \lambda_{\text{min}}$,

$$\text{wobei} \quad \lambda_{\text{min}} = \sqrt[3]{\frac{4 \pi V_M}{3 N_L}} = \sqrt[3]{\frac{4 \pi M}{3 \varrho N_L}}$$

die von BORN und BRILLOUIN eingeführte kleinste Wellenlänge für elastische Wellen ist. Damit wird

$$\left(\frac{dW}{ds}\right)_{\text{trans}} = \frac{\pi e^2 e_{14}^2}{4 \varepsilon^2 c_{44}} \sqrt[3]{\left(\frac{3 \varrho N_L}{4 \pi M}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{v^2}\right) \left\{ (1 + \gamma^2)^2 \frac{b^2}{v^2} + \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right]^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\lambda_{\text{min}}}{r}\right)^2 \left(\frac{b^2}{v^2}\right)^2 \left[(2 + \gamma^2) [(1 + \gamma^2)^2 + 2 \gamma^2] \left(\frac{b^2}{v^2}\right)^2 - [2(1 + 2 \gamma^2) + \gamma^2(2 - \gamma^4)] \frac{b^2}{v^2} + \gamma^2(2 - \gamma^2) \right] \right\} \\ \text{für } b < v < c, \quad (7.3)$$

$$\left(\frac{dW}{ds}\right)_{\text{long}} = \frac{\pi e^2 e_{14}^2}{4 \varepsilon^2 c_{11}} \sqrt[3]{\left(\frac{3 \varrho N_L}{4 \pi M}\right)^2} \cdot \frac{a^2}{v^2} \left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right)^2 (2 + \gamma^2) \left\{ (2 + \gamma^2) - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\lambda_{\text{min}}}{r}\right)^2 \left[3(1 + \gamma^2) \frac{a^2}{v^2} - \gamma^2 \right] \frac{a^2}{v^2} \right\} \quad (7.4) \\ \text{für } a < v < c.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die von r abhängigen Terme in (7.3) und (7.4) vernachlässigt werden können. Dazu sei zunächst festgestellt, daß immer $r > \frac{1}{2} \lambda_{\text{min}}$ sein muß, da es wenig sinnvoll ist, bei Bereichen, die kleiner sind als eine Gitterzelle, noch von einem elastischen Feld zu sprechen. Man denke sich nun diesen kleinsten Wert für r in (7.3) und (7.4) eingesetzt. Dann bewirken die von r abhängenden Glieder schon bei so kleinen Geschwindigkeiten wie etwa $v = 2b$ oder $v = 2a$ gegenüber den von r unabhängigen Termen nur eine Korrektur von der Größenordnung 1%. Diese Korrektur nimmt nach größeren Geschwindigkeiten hin rasch ab. Wir können also, ohne einen großen Fehler zu machen, die Energieabstrahlung folgendermaßen angeben:

$$\left(\frac{dW}{ds}\right)_{\text{trans}} = \frac{\pi e^2 e_{14}^2}{4 \varepsilon^2 c_{44}} \sqrt[3]{\left(\frac{3 \varrho N_L}{4 \pi M}\right)^2} \{K_2\} \\ \cdot \left\{ \left(1 - \frac{b^2}{v^2}\right) \left[(1 + \gamma^2)^2 \frac{b^2}{v^2} + \left[1 - (2 + \gamma^2) \frac{b^2}{v^2} \right]^2 \right] \right\} \quad (7.5) \\ \text{für } b < v < c,$$

$$\left(\frac{dW}{ds}\right)_{\text{long}} = \frac{\pi e^2 e_{14}^2}{4 \varepsilon^2 c_{11}} \sqrt[3]{\left(\frac{3 \varrho N_L}{4 \pi M}\right)^2} \{K_1\} \\ \cdot \left\{ (2 + \gamma^2)^2 \frac{a^2}{v^2} \left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right)^2 \right\} \text{ für } a < v < c. \quad (7.6)$$

Die Ausdrücke vor den geschweiften Klammern enthalten nur universelle Konstanten und Materialkonstanten. Sie geben die absolute Größe des Effektes an. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Energieabstrahlung wird durch die geschweiften Klammern gegeben. Trägt man diese Klammern für verschie-

dene v -Werte auf, so erhält man die in Abb. 1 und Abb. 2 gezeigten Kurven. Die Kurve für die Energieabstrahlung durch Longitudinalwellen beginnt bei $v = a$ und geht, nach Durchlaufen eines Maximums im Bereich noch kleiner Geschwindigkeiten, mit wachsendem v gegen Null. Dagegen beginnt die Kurve für die Energieabstrahlung durch Transversalwellen bei $v = b$ und strebt, nach Durchlaufen eines Maximums und eines Minimums im Bereich noch kleiner Geschwindigkeiten, mit wachsendem v von unten gegen den Wert eins. Der Verlauf der Geschwindigkeitsabhängigkeit hängt wesentlich ab von der Art des untersuchten Kristalles. In dem von uns betrachteten Fall (kubische Kristalle) werden bei größeren Geschwindigkeiten nur elastische Transversalwellen angeregt.

In der folgenden Tabelle sind zahlenmäßige Angaben über die absolute Größe des Effektes für ver-

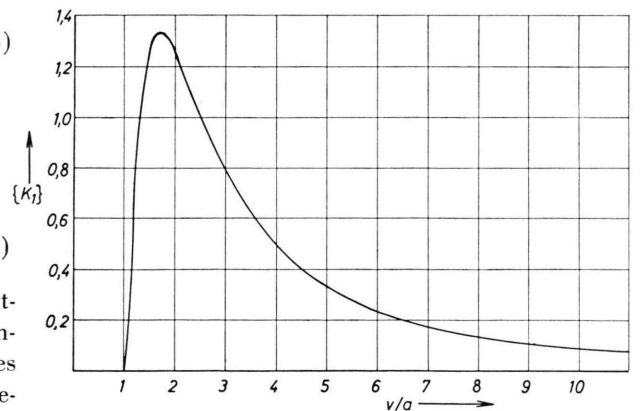


Abb. 1. Geschwindigkeitsabhängigkeit der Energieabstrahlung durch elastische Longitudinalwellen.

	c_{11} in $\frac{\text{dyn}}{10^{10} \text{ cm}^2}$	c_{12} in $\frac{\text{dyn}}{10^{10} \text{ cm}^2}$	c_{44} in $\frac{\text{dyn}}{10^{10} \text{ cm}^2}$	ρ in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	ϵ_{rel}	ϵ_{14} in $\frac{\text{est. L. E.}}{10^4 \text{ cm}^2}$	M	a in $\frac{\text{cm}}{10^5 \text{ s}}$	b in $\frac{\text{cm}}{10^5 \text{ s}}$	λ_{min} in 10^{-8} cm	$\frac{\pi e^2 \epsilon_{14}^2}{4 \epsilon^2 c_{44}} \sqrt{\frac{3 \varrho N_L}{4 \pi M}}$ in keV cm	$\frac{\pi e^2 \epsilon_{14}^2}{4 \epsilon^2 c_{11}} \sqrt{\frac{3 \varrho N_L}{4 \pi M}}$ in keV cm
NaBrO ₃	56,5	18,4	15,3	3,34	5,75	1,25	150,9	4,12	2,14	6,73	122	33,05
NaClO ₃	49,4	14,6	11,8	2,49	5,6	0,65	106,5	4,45	2,17	6,67	45,8	10,94
ZnS	94,2	56,8	43,6	4,05	8,1	-4,2	97,5	4,83	3,28	5,5	364	168,2

Tab. 1. Materialkonstanten von Natriumbromat, Natriumchlorat und Zinksulfid (kubisch) und daraus berechnete Zahlenwerte für den Energieverlust pro cm eines Elektrons durch Abstrahlung von mechanischer Energie in Form von elastischen Transversal- und Longitudinalwellen.

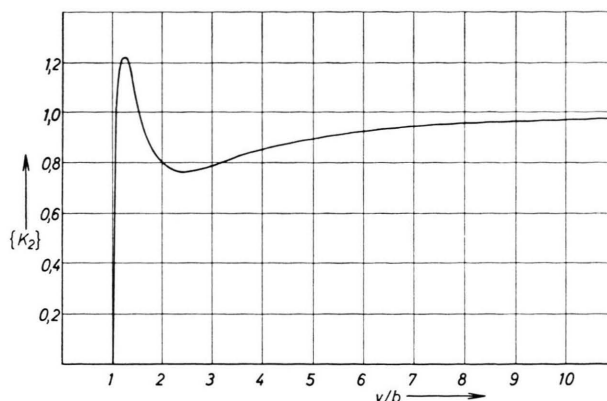


Abb. 2. Geschwindigkeitsabhängigkeit der Energieabstrahlung durch elastische Transversalwellen.

schiedene Kristalle zusammengestellt. Die Zahlenwerte für die Materialkonstanten wurden dem LANDOLT-BÖRNSTEIN⁷ entnommen. Bei der Berechnung der Zahlenwerte für

$$\frac{\pi e^2 \epsilon_{14}^2}{4 \epsilon^2 c_{44}} \sqrt{\left(\frac{3 \varrho N_L}{4 \pi M}\right)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\pi e^2 \epsilon_{14}^2}{4 \epsilon^2 c_{11}} \sqrt{\left(\frac{3 \varrho N_L}{4 \pi M}\right)^2}$$

wurde für e die Elementarladung eingesetzt.

Der durch ČERENKOV-Strahlung hervorgerufene Energieverlust pro Weglängeneinheit beträgt für Elektronen einige keV pro cm (siehe JELLEY⁸). Der hier untersuchte Effekt, der ja ein mechanisches Analogon zum ČERENKOV-Effekt ist, zeigt also eine wesentlich größere Energieabstrahlung. Sie wird wahrscheinlich dadurch etwas herabgesetzt, daß bei den piezoelektrischen Konstanten Dispersion auftritt. Um diese Erscheinung berücksichtigen zu können, müßte man im Besitz einer atomistischen Theorie der piezoelektrischen Konstanten sein. Das ist aber bis heute leider nicht der Fall. Die Größenordnung des Effektes dürfte aber durch die Dispersion kaum geändert werden.

Herr Prof. Dr. M. KOHLER regte diese Arbeit an und förderte sie durch Ratschläge und Diskussionen. Dafür möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken. Herrn Prof. Dr. G. LAUTZ danke ich für die kritische Durchsicht des Manuskriptes.

⁷ LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik, Technik, II. Band, 6. Teil, Springer-Verlag, Berlin 1959.

⁸ J. V. JELLEY, ČERENKOV Radiation and Its Applications, Pergamon Press, London - New York - Paris - Los Angeles 1958.